

MAT0164 - Números Inteiros: Uma introdução à Matemática
1ª Prova - 26/04/2017

Nome: _____

Nº USP: _____

Atenção:

- 1 - Leia os enunciados com atenção!
- 2 - Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.
- 3 - Boa prova!

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

1. (2,5) Use o princípio de indução para provar que:

(a) Se $a, b \in \mathbb{Z}$ são tais que $0 < a < b$ então $0 < a^n < b^n$ para todo inteiro $n \geq 1$.(b) Para todo inteiro $n \geq 1$ vale que $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.(a) Se $n=1$, nada a fazer!Hipótese de Indução:Seja $k \geq 1$ e suponha que $0 < a < b \Rightarrow 0 < a^k < b^k$.Tese: Provar que $0 < a^{k+1} < b^{k+1}$.

$$\left. \begin{array}{l} a > 0 \text{ e } a^k > 0 \Rightarrow a \cdot a^k = a^{k+1} > 0 \\ \text{H.I. } a^k < b^k \text{ e } a > 0 \Rightarrow a^{k+1} < ab^k \\ a < b \text{ e } b^k > 0 \Rightarrow ab^k < bb^k \end{array} \right\} \Rightarrow a^{k+1} < ab^k < b^{k+1}$$

Logo $0 < a^{k+1} < b^{k+1}$.Pelo princípio de indução, a afirmação é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.(b) $n=1$, $(2 \cdot 1)! = 2 < 2^{2 \cdot 1} (1!)^2 = 4$.Hipótese de indução:Seja $k \geq 1$ e suponha que $(2k)! < 2^{2k} (k!)^2$.Tese: $(2(k+1))! < 2^{2(k+1)} ((k+1)!)^2$.

$$2(k+1)! = 2(k+1)(2k+1)(2k)! < 2(k+1)(2k+1)2^{2k} (k!)^2$$

H.I

$$\left(\text{É claro que } 2k+1 < 2k+2. \text{ Logo } 2^{2k+2} ((k+1)!)^2 \right)$$

$$2(k+1)! < 2^3 (k+1)^2 2^{2k} (k!)^2 = 2^{2k+2} ((k+1)!)^2$$

Portanto, por indução, a afirmação é verdadeira.

2. (2,5) Prove que:

(a) A soma dos cubos de três inteiros positivos consecutivos é sempre divisível por 9.

(b) $13 | (2^{222} + 3^{222})$.

(a) Se $a \in \mathbb{Z}$, $a = 3q + r$, onde $r = 0, 1$ ou 2 .

$$a = 3q + r \quad a+1 = 3q + r + 1 \quad e \quad a+2 = 3q + r + 2$$

$$a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = (3q+r)^3 + (3q+r+1)^3 + (3q+r+2)^3$$

Utilizando a fórmula do Binômio de Newton, temos

$$(3q+r)^3 = \underbrace{27q^3 + 3(3q)^2r + 3(3q)r^2 + r^3}_{3 \mid \dots}$$

Observe que $\forall r$, $3 \mid 27q^3 + 27q^2r + 9qr^2$

$$\text{Logo, } a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = 9Q + r^3 + (r+1)^3 + (r+2)^3$$

Ma $r^3 + (r+1)^3 + (r+2)^3$. É só testar agora:

$$r=0 \Rightarrow r^3 + (r+1)^3 + (r+2)^3 = 0 + 1 + 8 = 9$$

$$r=1 \Rightarrow r^3 + (r+1)^3 + (r+2)^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

$$r=2 \Rightarrow r^3 + (r+1)^3 + (r+2)^3 = 8 + 64 + 125 = 197$$

$$(b) \quad 13 = 9 + 4 \quad 13 - 9 = 4$$

$$\text{Assim } (-13 - 3^2)^{111} = (-2)^{111}$$

$$\text{Logo } 2^{222} = \sum_{i=0}^{110} \binom{110}{i} 13^{110-i} (-3^2)^i + (-1)^{111} (3^2)^{111}$$

todas as parcelas

são divisíveis por 13

já que $111-i \geq 1 \quad \forall i=0, \dots, 110$

Portanto $2^{222} + 3^{222}$ é divisível por 13.

2. (2,5) Prove que:

(a) A soma dos cubos de três inteiros positivos consecutivos é sempre divisível por 9.

(b) $17 | (2^{333} + 3^{222})$.

(a) Queremos provar que para todo $n \geq 1$,
 $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é divisível
 por 9.

Uma maneira: Por indução em n .

(1) Se $n = 1$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 9 \times 4$.

(2) Suponha que $k \geq 1$ e que
 $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9m$, para algum $m \in \mathbb{Z}$.

Provar que $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ é múltiplo de 9.

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 3 \cdot 3k^2 + 3 \cdot 3^2 k + 3^3$$

↳ Binômio
de Newton

$$= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3)$$

$$= 9m + 9(k^2 + 3k + 3) = 9(m + k^2 + 3k + 3).$$

Por (1) e (2) e por indução, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

(b) Uma maneira: Para todo inteiro ímpar $n \geq 1$ e

para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, temos que
 $a^n + b^n = (a+b) \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a^{n-1-i} b^i$

Use essa fórmula para $a = 2^3$ e $b = 3^2$ e $n = 111$.

$$2^{333} + 3^{222} = (2^3 + 3^2) \left[2^{3(110)} - 2^{3(109)} \cdot 3^2 + \dots - 2^3 \cdot 3^{2(109)} + 3^{2(110)} \right]$$

$$17 \mid 2^{333} + 3^{222}$$

3. (2,0)

(a) Determine inteiros a e b tais que $a - b = 537$ e o quociente e o resto da divisão de a por b sejam respectivamente 5 e 29.

(b) Determine inteiros x e y tais que $35x + 117y = \text{mdc}(35, 117)$.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \begin{cases} a - b = 537 \\ a = 5b + 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 537 \\ -a + 5b = -29 \end{cases} \Rightarrow 4b = 508 \\
 & \Rightarrow \underline{b = 127} \quad a = 537 + 127 = \underline{664}
 \end{aligned}$$

(b)

	3	2	1	11
117	35	12	11	1
42	11	1	0	

$$1 = \text{mdc}(117, 35)$$

$$1 = 12 - 11 = (117 - 3 \times 35) - (35 - 2 \times 12)$$

$$= 117 - 4 \times 35 + 2(117 - 3 \times 35)$$

$$= 3 \times 117 - 10 \times 35$$

$$\therefore \underline{1 = 3 \times 117 + (-10) \times 35}$$

3. (2,0)

(a) Determine inteiros a e b com $a - b = 543$ e o quociente e o resto da divisão de a por b sejam respectivamente 4 e 18 .

(b) Determine inteiros r e s tais que $46r + 119s = \text{mdc}(46, 119)$.

$$(a) \begin{cases} a - b = 543 \\ a = 4b + 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 543 \\ -a + 4b = -18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3b = 525 \Rightarrow b = 175$$

$$a = 718$$

$$\boxed{a = 718} \text{ e } \boxed{b = 175}.$$

(b)

	2	1	1	2	2	1	2
119	46	27	19	8	3	2	1
27	19	8	3	2	1	0	

Pelo algoritmo de Euclides, $\text{mdc}(119, 46) = 1$

$$1 = 3 - 2 = 3 - (8 - 2 \times 3) = -8 + 3 \times 3$$

$$= -(27 - 19) + 3(19 - 2 \times 8)$$

$$= -27 + 19 + 3 \times 19 - 6 \times 8$$

$$= -27 + 4 \times 19 - 6 \times (27 - 19)$$

$$= -7 \times 27 + 10 \times 19$$

$$= -7 \times (119 - 2 \times 46) + 10 \times (46 - 27)$$

$$= -7 \times 119 + 14 \times 46 + 10 \times 46 - 10(119 - 2 \times 46)$$

$$= (-17) \times 119 + 44 \times 46$$

4. (3,0)

Be A

(a) Sejam a e b inteiros primos entre si. Mostre que $\text{mdc}(a^2 + ab + b^2, a + b) = 1$.

(b) Seja $a \neq 1$ um número inteiro. Mostre que $\text{mdc}\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \text{mdc}(a - 1, n)$, para todo inteiro $n \geq 1$. Conclua que $(a - 1)^2 \mid (a^n - 1)$ se, e somente se $(a - 1) \mid n$.

(a) Sabemos que se $x = qy + r$ então $\text{mdc}(x, y) = \text{mdc}(y, r)$.

Vamos utilizar esse resultado.

$$a^2 + ab + b^2 = a(a+b) + \underbrace{b^2}_r. \text{ Logo } \text{mdc}(a^2 + ab + b^2) = \text{mdc}(a+b, b^2).$$

Observe que como $\text{mdc}(a, b) = 1$, tem-se que $\text{mdc}(a+b, b) = 1$.

($\text{mdc}(a+b, b) = \text{mdc}(a, b)$.)

Então, $\text{mdc}(a+b, b^2) = \text{mdc}(a+b, b \cdot b) = 1$.

(De fato, por Bézout, existem inteiros r, s tais que $r(a+b) + sb = 1$. Então $r(a+b)b + s \underbrace{b^2}_r = b$.

Se $d \mid a+b$ e $d \mid b^2$, $d \mid b$ então $d \mid \text{mdc}(a+b, b) = 1$.

(b) Vamos provar por indução em n , que para todo n , existe $g_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = g_n(a - 1) + n.$$

$$(1) \quad n = 1 \quad 1 = \frac{a-1}{a-1} = \underbrace{0}_{g_1}(a-1) + 1$$

(2) Hipótese de Indução:

$$k \geq 1 \quad \frac{a^k - 1}{a - 1} = g_k(a - 1) + k$$

$$\text{Tese } \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} = g_{k+1}(a - 1) + k + 1$$

$$\frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} = \frac{a^{k+1} - a^k + a^k - 1}{a - 1} = \frac{a^k(a - 1) + a^k - 1}{a - 1}$$

$$\stackrel{\text{H.I.}}{=} a^k + (a - 1)g_k + k = a^k - 1 + (a - 1)g_k + k + 1.$$

$$= (a - 1) \left[\underbrace{a^k + \dots + a + 1}_{g_{k+1}} + g_k \right] + (k + 1)$$

$$\text{Logo } \frac{a^n - 1}{a - 1} = g_n(a - 1) + n \text{ para todo } n \geq 1.$$

$$\text{Então } \text{mdc}\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \text{mdc}(a - 1, n) \text{ para todo } n \geq 1$$

Mostrar que $(a - 1)^2 \mid a^n - 1 \Leftrightarrow a - 1 \mid n$.

$$\text{Se } (a - 1)^2 \mid a^n - 1 \text{ então } a - 1 \mid \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow \frac{a^n - 1}{a - 1} = g(a - 1) \Rightarrow$$

$$\text{mdc}\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \text{mdc}((a - 1)g, a - 1) = (a - 1) \text{mdc}(g, 1)$$