

MAP2223 – Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Prova 2

2º semestre de 2017 – Prof. Claudio H. Asano – 21/11/2017

1. Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$, sujeito a $y(0) = -1$ e $y'(0) = -4$. Justifique.
2. Calcule a transformada de Laplace de $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ t^2, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$. Expresse a resposta em termos da função da função escada $u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < c \\ 1 & \text{se } t \geq c \end{cases}$. Justifique.
3. Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial $y'' + 9y = \begin{cases} \cos(t), & 0 \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ \sin(t), & t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, sujeito a $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Justifique.
4. Encontre uma fórmula para a solução do problema de valor inicial $y'' + \omega^2 y = f(t)$, sujeito a $y(0) = k_0$ e $y'(0) = k_1$. Justifique.
5. Resolva o problema de valor inicial $y'' + y = \sin(3t) + 2\delta(t - \pi/2)$, sujeito a $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$, com a transformada de Laplace. Justifique sua resposta.

1. De $(s^2 - 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s-3} - s - 1$, obtemos por frações parciais

$$Y(s) = \frac{5}{2} \frac{1}{(s-1)} - 4 \frac{1}{(s-2)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s-3)}$$

e assim

$$y(t) = \frac{5}{2}e^t - 4e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

2. Como

$$\begin{aligned} f(t) &= t + u_1(t)(t^2 - t) - u_2(t)t^2 \\ &= t + u_1(t)((t-1+1)^2 - (t-1+1)) - u_2(t)(t-2+2)^2 \\ &= t + u_1(t)((t-1)^2 + (t-1)) - u_2(t)((t-2)^2 + 4(t-2) + 4) \end{aligned}$$

$$\text{obtemos } F(s) = \frac{1}{s^2} + e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) - e^{-2s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s} \right)$$

3. Primeiro escrevemos $f(t) = u_0(t) \cos(t) + u_{3\pi/2}(t)(\sin(t) - \cos(t))$. Usando que $\sin(t) = -\cos(t - 3\pi/2)$ e $\cos(t) = \sin(t - 3\pi/2)$, obtemos

$$f(t) = u_0(t) \cos(t) - u_{3\pi/2}(t)(\cos(t - 3\pi/2) + \sin(t - 3\pi/2)).$$

Da equação, temos

$$(s^2 + 9)Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} - e^{-(3\pi/2)s} \left(\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} \right)$$

e, por frações parciais,

$$Y(s) = \frac{1}{8} \frac{s}{(s^2 + 1)} - \frac{1}{8} \frac{s}{(s^2 + 9)} - e^{-(3\pi/2)s} \left(\frac{1}{8} \frac{s}{(s^2 + 1)} - \frac{1}{8} \frac{s}{(s^2 + 9)} + \frac{1}{8} \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{8} \frac{1}{s^2 + 9} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{8} \cos(t) - \frac{1}{8} \cos(3t) \\ &\quad - u_{3\pi/2}(t) \left(\frac{1}{8} \cos(t - 3\pi/2) - \frac{1}{8} \cos(3(t - 3\pi/2)) + \frac{1}{8} \sin(t - 3\pi/2) - \frac{1}{8} \frac{\sin(3(t - 3\pi/2))}{3} \right) \end{aligned}$$

Usamos agora $\cos(3(t - 3\pi/2)) = \sin(3t)$ e $\sin(3(t - 3\pi/2)) = -\cos(3t)$ para obter

$$y(t) = \frac{1}{8} (\cos(t) - \cos(3t)) + \frac{1}{8} u_{3\pi/2}(t) (\sin(t) + \sin(3t) - \cos(t) - \frac{1}{3} \cos(3t))$$

4. Da equação, temos

$$(s^2 + \omega^2)Y(s) = sk_0 + k_1 + F(s)$$

e assim

$$Y(s) = k_0 \frac{s}{s^2 + \omega^2} + k_1 \frac{1}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{(s^2 + \omega^2)} F(s)$$

Portanto

$$y(t) = k_0 \cos(\omega t) + \frac{k_1}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(t - \tau) \sin(\omega \tau) d\tau.$$

5. Da equação, temos

$$(s^2 + 1)Y(s) = s - 1 + \frac{3}{s^2 + 9} + 2e^{(-\pi/2)s}$$

e, por frações parciais,

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{3}{8} \frac{1}{(s^2 + 1)} - \frac{3}{8} \frac{1}{(s^2 + 9)} + 2e^{(-\pi/2)s} \frac{1}{s^2 + 1}$$

Portanto

$$y(t) = \cos(t) - \sin(t) + \frac{3}{8} \sin(t) - \frac{3 \sin(3t)}{8 \cdot 3} + 2u_{\pi/2}(t) \sin(t - \pi/2)$$

$$y(t) = \cos(t) - \frac{5}{8} \sin(t) - \frac{1}{8} \sin(3t) - 2u_{\pi/2}(t) \cos(t).$$

Tabela de Transformadas de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, s > 0$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}, s > 0$
$t^n, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
$t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s > a $
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > a $
$e^{at} \text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
$t^n e^{at}, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < c \\ 1 & \text{se } t \geq c \end{cases}$	$\frac{e^{-cs}}{s}, s > 0$
$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), c > 0$
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
$\delta(t-c)$	e^{-cs}
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u) du$
$f(t)$ periódica de período $T > 0$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$
$f'(t) + f(0)\delta(t)$	$sF(s)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$