0

MAP2223 – Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Prova 1

2° semestre de 2017 – Prof. Claudio H. Asano – 03/10/2017

1. Considere a equação diferencial ordinária $y' = x^2 y$ sujeito a $y(0) = 1$. Calcule $y(1)$ pelo Método de Euler com 1, 2 e 4 passos. Execute a extrapolação de Richardson adequada.

2. Encontre a solução da equação diferencial linear $y' + y = -x + 5e^{-2x}$, $y(0) = -4$. Justifique sua resposta.

3. Calcule a solução da equação diferencial $y'' - 3y' - 10y = 0$ sujeito às condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 19$. Justifique sua resposta.

4. Um tanque contém inicialmente uma solução de 10 libras de sal em 60 galões de água. Água com 1/2 libra de sal por galão é adicionada ao tanque a 6 galões por minuto e a solução resultante sai à mesma taxa. Encontre a quantidade $Q(t)$ de sal no tanque no instante $t > 0$. Justifique sua resposta.

5. Encontre uma solução particular de $y' = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 4e^{-3t} \\ 4e^{-5t} \end{bmatrix}$. Utilize variação dos parâmetros. Justifique sua resposta.

Respostas: 0 MAP2223 – Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações, Prova 1, 2° semestre de 2017, Prof. Claudio H. Asano – 03/10/2017

1. A tabela de extrapolação é

n	h	F_0	F_1	F_2
1	1.00	1.00000000000	1.25000000000	1.36560058594
2	0.500	1.12500000000	1.33670043945	
4	0.250	1.23085021973		

2. Um fator integrante é e^x e a solução é $y = -x + 1 - 5e^{-2x}$

3. O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10$ com raízes $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 5$. A solução geral é $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{5x}$ e a solução é $y = -2e^{-2x} + 3e^{5x}$.

4. $\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{10} = 3$, $Q(0) = 10$,$Q(t) = 30 - 20e^{-t/10}$ libras.

5. Os autovalores são $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -5$, com respectivos autovetores $x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Assim, obtemos duas soluções L.I. da equação homogênea, $y_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$ e $y_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t}$. Procuramos uma solução particular do tipo $y_p = L_1 y_1 + L_2 y_2$ que é obtida resolvendo o sistema $\begin{bmatrix} -e^{-3t} & -3e^{-5t} \\ e^{-3t} & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1' \\ L_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{-3t} \\ 4e^{-5t} \end{bmatrix}$. Deste modo $L_1' = 2 + 6e^{-2t}$ e $L_2' = -2 - 2e^{2t}$ e portanto $L_1 = 2t - 3e^{-2t}$ e $L_2 = -2t - e^{2t}$ e uma solução particular é $y_p = \begin{bmatrix} e^{-5t}(3+6t) + e^{-3t}(3-2t) \\ -e^{-5t}(3+2t) - e^{-3t}(1-2t) \end{bmatrix}$